



TD n°9: Promenade

Analyse complexe 2025-2026, Thomas Serafini
tserafini@dma.ens.fr

Les exercices marqués d'un  sont à faire en priorité, ceux marqués d'un  sont des exercices complémentaires, à faire pour aller plus loin.

Exercice 1. Formules d'aire.

Soit $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une fonction analytique sur \mathbb{D} , qu'on suppose bornée et injective.

1. Calculer le déterminant jacobien de f vue comme un difféomorphisme de \mathbb{D} sur son image $f(U)$.
2. Démontrer la formule de l'aire

$$\text{Aire}[f(\mathbb{D})] = \pi \sum_{n \geq 0} n |a_n|^2.$$

On rappelle la formule de Stokes holomorphe-antiholomorphe : pour f, g fonctions C^1 sur K compact à bord C^1 par morceaux, on a

$$\int_{\partial K} f dz + g d\bar{z} = 2i \int_K \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial g}{\partial z} \right) dx dy.$$

3. Soit K un compact à bord C^1 par morceaux. Démontrer que

$$\text{Aire}[K] = \frac{1}{2i} \int_{\partial K} \bar{z} dz.$$

4. Soit à présent $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$ une fonction analytique au voisinage du cercle γ_r de rayon r , injective sur γ_r . Soit K_r le compact du plan dont le bord est $f(\gamma_r)$. Démontrer l'égalité

$$\text{Aire}[K_r] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n |a_n|^2 r^{2n}.$$

Exercice 2. Un calcul de somme.

1. Démontrer que $\tan(x + iy) = \frac{\sin(2x) + i \sinh(2y)}{\cos(2x) + \cosh(2y)}$ puis démontrer que les solutions de l'équation $\tan(z) = z$ sont toutes réelles. On note les solutions strictement positives $(\lambda_n)_{n \geq 1}$.
2. On pose $f(z) = \sin(z) - z \cos(z)$. Démontrer en intégrant $\frac{f'(z)}{z^2 f(z)}$ sur un contour bien choisi que

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\lambda_n^2} = \frac{1}{10}.$$

3. Démontrer que pour tout $k \geq 1$ entier, on a

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\lambda_n^{2k}} \in \mathbb{Q}.$$

4. Démontrer, pour $a \in [-1, 1]$, l'égalité

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\lambda_n a)}{\lambda_n^2 \sin(\lambda_n)} = \frac{5a^3 - 3a}{20}.$$

[†]Merci à Hadrien et Louise pour ce phoque et ce raton-laveur en Tikz.

Exercice 3. Principe de l'argument généralisé et inversion locale.

Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe, on considère $f \in \mathcal{M}(U)$ et $g \in \mathcal{O}(U)$.

1. Démontrer le principe de l'argument généralisé : si γ est un lacet simple orienté dans le sens direct, alors

$$\int_{\gamma} g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2i\pi \sum_{f(\alpha)=0} v_{\alpha}(f)g(\alpha)$$

où la somme porte sur les zéros de f à l'intérieur de γ et $v_{\alpha}(f)$ est l'ordre d'annulation de f en α (négatif si α est un pôle).

2. On suppose à présent f holomorphe. Soit $a \in U$ tel que $f'(a) \neq 0$: justifier qu'il existe un disque ouvert $a \in D \subseteq U$ sur lequel f est injective et démontrer que la formule

$$w \mapsto \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D} \frac{zf'(z)}{f(z) - w} dz$$

définit une fonction holomorphe sur $f(D)$.

3. Démontrer que cette fonction est une réciproque holomorphe à $f|_D$. On a prouvé le théorème d'inversion locale en version holomorphe, à savoir qu'une fonction holomorphe de dérivée non-nulle admet localement un inverse holomorphe.
4. Redémontrer ce théorème à partir du théorème d'inversion locale C^1 .

Exercice 4. Autour de la transformée de Mellin

On définit, pour f fonction mesurable de $\mathbb{R}_{>0}$ dans \mathbb{C} :

$$\mathcal{M}f(s) = \int_0^{\infty} x^s f(x) \frac{dx}{x}$$

pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que l'intégrale converge absolument.

1. Démontrer que si $\mathcal{M}f(s)$ converge absolument, alors $\mathcal{M}f(s')$ converge également pour $\Re(s) = \Re(s')$. En déduire que $\mathcal{M}f$ définit une fonction sur une bande (potentiellement vide) $a < \Re(s) < b$.
2. Démontrer $\mathcal{M}f$ est holomorphe sur cette bande.
3. Démontrer que pour $a < \sigma < b$, $t \mapsto \mathcal{M}f(\sigma + it)$ est la transformée de Fourier de $y \mapsto e^{-\sigma y} f(e^{-y})$
4. En déduire la formule d'inversion de Mellin : si $\mathcal{M}f$ converge sur $a < \Re(s) < b$, qu'on a $a < \sigma < b$ et que $t \mapsto \mathcal{M}f(\sigma + it)$ est L^1 , alors pour tout $x \in \mathbb{R}_{>0}$, on a

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\sigma+i\mathbb{R}} x^{-s} \mathcal{M}f(s) ds.$$

On suppose à présent que f est C^{∞} à décroissance rapide et continue en l'infini, c'est-à-dire que $x^n f(x)$ est bornée pour tout n . On suppose que les dérivées de f vérifient la même condition, et que f et ses dérivées sont bornées au voisinage de 0.

5. (a) Démontrer que $\mathcal{M}f$ est holomorphe sur la bande infinie $\Re(s) > 0$.
 (b) Démontrer que pour $\Re(s) > 0$, on a $\frac{1}{s} \mathcal{M}(f')(s+1) = -\mathcal{M}f(s)$.
 (c) En déduire que $\mathcal{M}f$ se prolonge en une fonction méromorphe sur \mathbb{C} à pôles simples aux entiers négatifs, avec un résidu de $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ en $-n$.

Exercice 5. Les fonctions hypergéométriques

Pour $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{C}^p$, $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_q) \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0})^q$, on définit

$${}_pF_q[\mathbf{a}; \mathbf{b} | z] = \sum_{n \geq 0} \frac{\prod_{i=1}^p (a_i)_n}{n! \prod_{i=1}^q (b_i)_n} z^n$$

où $(a)_n = a(a+1)\dots(a+n-1)$.

1. Calculer le rayon de convergence de ${}_pF_q$ en fonction de p, q . On pensera à distinguer si $a_i \in \mathbb{Z}$ ou non.
2. Exprimer les fonctions $e^z, \frac{1}{1-z}, -\log(1-z), \int_0^z e^{\zeta^2} d\zeta$ avec des fonctions hypergéométriques.
3. On pose $\theta_z = z\partial_z$. Démontrer que

$$\theta_z \left(\sum_{n \geq 0} a_n z^n \right) = \sum_{n \geq 0} n a_n z^n.$$

4. Soient $P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$. Démontrer qu'une série entière $y(z) = \sum a_n z^n$ est solution (formelle) de l'équation différentielle

$$P(\theta_z)y - zQ(\theta_z)y = 0$$

si et seulement si

$$P(n)a_n = Q(n-1)a_{n-1}$$

pour tout $n \geq 0$ (où l'on prend par convention $a_{-1} = 0$). En déduire que ${}_pF_q[\mathbf{a}; \mathbf{b}|z]$ est solution de l'équation différentielle

$$\theta_z(\theta_z + b_1 - 1) \dots (\theta_z + b_q - 1)y(z) = z(\theta_z + a_1) \dots (\theta_z + a_p)y(z).$$

5. Démontrer que

$$(1-z)^{-\alpha} = {}_1F_0[\alpha | z]$$

et en déduire la formule

$$\frac{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)} {}_2F_1[a, b; c | z] = \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a} dt$$

pour $z \notin \mathbb{R}_{\geq 1}, \Re(c) > \Re(b) > 0$. On rappelle la formule, pour $\Re(\alpha), \Re(\beta) > 0$:

$$\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

6. Démontrer la formule de transformation de Pfaff :

$${}_2F_1[a, b; c | z] = (1-z)^{-a} {}_2F_1 \left[a, c-b; c \left| \frac{z}{z-1} \right. \right].$$

Exercice 6. Fonctions algébriques sur des ouverts.

On dit qu'une fonction holomorphe $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ définie sur un ouvert U est algébrique s'il existe un polynôme en deux variables $P(z, X) \in \mathbb{C}[z, X]$ tel que $P(z, f(z)) = 0$. On écrit $P(z, X) = \sum_{i=0}^n P_i(z)X^i$, avec $P_i(z) \in \mathbb{C}[z]$.

1. Soit V un voisinage de 0 et f une fonction algébrique sur $V \setminus \{0\}$. Démontrer que f a au pire un pôle en 0, au pire de l'ordre du zéro de P_n en 0.
2. Soit f une fonction algébrique sur $\mathbb{CP}^1 \setminus S$ avec S un ensemble fini. Démontrer que f est une fonction rationnelle.
On peut pousser ce résultat un peu plus loin, quitte à connaître un peu de choses sur les ordinaux. Soit $X \subseteq \mathbb{CP}^1$ un fermé non-vide au plus dénombrable et f une fonction algébrique définie sur $\mathbb{CP}^1 \setminus X$. On définit X' l'ensemble des points d'accumulation de X .
3. (a) Démontrer que $X' \subseteq X$ et que X' est fermé dans X .
On définit par récurrence ordinale $X^{(\alpha)}$:

$$\begin{cases} X^{(0)} = X \\ X^{(\alpha+1)} = (X^{(\alpha)})' \\ X^{(\alpha)} = \bigcap_{\beta < \alpha} X^{(\beta)} \text{ si } \alpha \text{ est un ordinal limite.} \end{cases}$$

(b) Démontrer qu'il existe α ordinal dénombrable tel que $X^{(\alpha+1)} = X^{(\alpha)} = \emptyset$.

(c) On définit $U_\alpha = \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \setminus X^{(\alpha)}$. Démontrer que f s'étend en une fonction méromorphe sur U_α pour tout α .

(d) En déduire que f est rationnelle.

4. Mettre en défaut la rationalité de f si l'on enlève la condition de dénombrabilité sur le compact $X \subseteq \mathbb{C}\mathbb{P}^1$.

Exercice 7. Théorème des résidus et cohomologie de de Rham.

Soit U un ouvert connexe de \mathbb{C} , on note $d : \mathcal{O}(U) \rightarrow \mathcal{O}(U)$ la dérivée. On définit

$$H_{\text{dR}}^1(U) = \mathcal{O}(U)/d\mathcal{O}(U).$$

1. Pour un lacet C^1 par morceaux $\sigma : [0, 1] \rightarrow U$, rappeler pourquoi $\int_\sigma : \mathcal{O}(U) \rightarrow \mathbb{C}$ envoie l'image de d sur zéro. En déduire que \int_σ se factorise en

$$\int_\sigma : H_{\text{dR}}^1(U) \rightarrow \mathbb{C}.$$

Pour la suite, on suppose que $U = V \setminus S$ avec S fini et V simplement connexe.

2. Démontrer que l'application $\mathcal{O}(U) \rightarrow \mathbb{C}^S$ donnée par

$$f \mapsto (\text{Res}_s(f))_{s \in S}$$

induit un isomorphisme de \mathbb{C} -espaces vectoriels

$$H_{\text{dR}}^1(U) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^S.$$

3. Reformuler le théorème des résidus en terme de cet isomorphisme.

4. Démontrer que $\sigma \mapsto \int_\sigma$ induit un isomorphisme $H_1(U, \mathbb{C}) \simeq H_{\text{dR}}^1(U)^*$ (on pourra admettre que tout cycle dans un ouvert de \mathbb{C} est cohomologue à un cycle C^1 par morceaux). Est-ce toujours vrai si l'on suppose que S est discret infini ?